

Buscando significado para divisão de frações: uma abordagem multissensorial

Aline Simas da Silva¹

GD13 – Educação Matemática e Inclusão

O presente trabalho trata-se de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática em andamento. Com apoio na teoria dos campos conceituais, buscamos especificamente atividades sobre divisão de frações com a ideia de partilha, proporcionando dessa maneira experiências diferentes das regras que geralmente são apresentadas, considerando assim que todos são capazes de aprender, mas não necessariamente da mesma forma. Trazemos primeiramente as concepções de alguns autores sobre as dificuldades associadas ao ensino-aprendizagem de frações, incluindo operações com números fracionários. Nos baseamos em pesquisas que discutem que o ensino voltado para um desenvolvimento amplo do conceito de divisão deve considerar tanto situações de quotição quanto de partição, sendo explorado nos livros didáticos, geralmente, apenas o significado de quotição. Considerando a perspectiva da cognição corporificada e concordando com alguns pesquisadores de que aprendizagem envolve ação e percepção, e é baseada portanto em fazer, tocar, mover e ver, buscamos proporcionar experiências variadas com divisão e frações, por meio de atividades multissensoriais, observando e analisando as falas e os gestos dos participantes.

Palavras-chave: Divisão. Fração. Partição. Atividade multissensorial. Educação Matemática Inclusiva

Introdução

No ensino de frações, muitas vezes, são realizadas atividades que procuram aproximar o tema da realidade do aluno, sendo frequente o uso de material manipulável para a representação de frações. É comum que a partir de um certo momento na vida escolar, o uso desses materiais não seja mais priorizado, e, quase que concomitantemente, é exigido do aluno a realização de cálculos com números fracionários, sem qualquer contextualização. Dentro deste cenário, a divisão de números fracionários pode tornar-se uma tarefa ainda mais difícil para o aluno, uma vez que requer também saltos qualitativos de pensamento em relação à mesma operação no campo dos números naturais (AMORIM & DAMAZIO, 2007).

Temos por objetivo discutir possibilidades de trabalhar divisão de frações, especialmente com a ideia de partilha, que por sua vez não costuma ser explorada nos livros didáticos, dentro da perspectiva da Teoria da Cognição Corporificada, que baseia nosso estudo por considerarmos que cada indivíduo aprende de maneira diferente, respeitando assim sua individualidade.

¹ Universidade Anhanguera de São Paulo, e-mail: alinesimas@gmail.com, orientador: Lulu Healy.

Consideramos as hipóteses de que atividades que privilegiam o visual e materiais multissensoriais, utilizados para a resolução de problemas de partição, podem contribuir para aprendizagem de operações com números fracionários, e que introduzir frações com ênfase na partição pode ser mais eficaz do que uma abordagem que privilegia apenas quotição.

Pretendemos com a pesquisa responder as seguintes questões: Como alunos expressam suas concepções de divisão em atividades com frações enfatizando a ideia partitiva? Qual o papel da percepção e de atividades sensório-motoras na construção de significados para divisão de frações e para abstração matemática e generalização?

Alguns aspectos sobre frações

Diversos trabalhos apontam a dificuldade existente quando o assunto envolvido é fração.

Podemos citar Nunes e Bryant (1997, apud OKUMA, 2010) que afirmam que com as frações as aparências enganam. “Às vezes as crianças usam os termos fracionários certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionários; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam”. Os autores declaram que as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.

Lopes (2008) aponta que um dos problemas no ensino de frações pode ser atribuído ao fato de que seu ensino tem estado restrito até o final da 6ª série (atual 7º ano do Ensino Fundamental).

Por trás desta visão, subjaz a crença no caráter categórico e cumulativo dos conteúdos, bastando ensinar frações em algum ponto do programa e, pronto! Daí em diante as frações estariam disponíveis como objetos de domínio dos alunos. Mas a realidade é outra, é comum que professores das séries finais do ensino fundamental e mesmo do ensino médio, exponham sua incredulidade pelo fato de seus alunos não responderem a atividades que envolvem frações com o desempenho esperado. (LOPES, 2008)

Lopes (2008) acrescenta que a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas e que os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. O autor expõe ainda que os obstáculos à aprendizagem de frações são muitos e de várias naturezas, a começar pelo fato de que a palavra fração está relacionada a muitas ideias e construtos. Nesse caminho, Nunes (2003, apud CAMPOS, MAGINA e NUNES, 2006) afirma que uma aprendizagem do conceito de fração poderá ser obtida com maior êxito quando esse conceito é trabalhado a partir de cinco significados: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Campos, Magina e Nunes (2006), afirmam que as situações parte-todo, muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, em geral, em dividir uma área em partes iguais, em nomear uma fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e em analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção. Acrescentam que o uso de outras situações poderia ser mais proveitoso para a apropriação lógica como alicerce para as ideias de fração.

Operações com frações

As operações com números fracionários também são tidas como um grande obstáculo. Vianna (2008), afirma:

As operações com frações aterrorizam as crianças há muito tempo. Aterrorizam adultos também, não sendo difícil encontrar pessoas que pararam de estudar e que, ao tentar retomar seus esforços para aprender a “ler e escrever”, encontram nas “frações” e suas operações um difícil obstáculo ao objetivo de tornarem-se cidadãos alfabetizados. As frases acima não recorrem à sustentação das autoridades: recorrem à experiência dos leitores que já tiveram pela frente o desafio de ensinar frações a crianças, jovens e adultos; recorre também à experiência daqueles leitores que sendo professores em universidades e cursos os mais diferentes, encontram adultos e profissionais que, embora muito capazes em diversos aspectos de suas relações com o saber, têm nas frações uma dificuldade que nos custa compreender.

Ainda com relação às operações com números fracionários, Lopes (2008) menciona que um problema grave é a prescrição de regras e macetes. Em particular, sobre a divisão, o autor anuncia que a regra geral tem sentido quando os alunos dispõem de ferramental algébrico, o que não ocorre da 4^a à 6^a série. Ele prossegue exemplificando com duas citações.

“Para dividir uma fração por uma fração, multiplica-se a fração dividendo pela fração divisor invertida” (Elementos de Aritmética, FTD, 1920).

“Para dividir um número racional por outro número racional diferente de zero, basta multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo” (Pensar e Descobrir, FTD, 2007)

Declara que as possibilidades de uma abordagem intuitiva para a divisão de frações são escassas, e que as aplicações realistas são mais escassas ainda.

Divisão e frações

Nunes e Bryant (1997, apud OKUMA, 2010), propõem que existe uma conexão entre divisão e fração, ficando, especialmente claro, quando se pensa em um tipo de problema envolvendo quantidades contínuas, pois se pensarmos em um problema como, por exemplo, 5 barras de chocolate dividido para 6 pessoas, o resultado da divisão será fração. De um ponto de vista informal, divisão é o ato de repartir, separar as partes de um todo e distribuir como declaram Nunes e Bryant (1997, apud NICOLODI, 2009). Talvez por esse motivo problemas de partição sejam considerados pelas crianças mais fáceis do que os de divisão por quota. (SELVA, 1998). Segundo Nicolodi (2009), as crianças já trazem consigo ao iniciarem sua vida escolar, a noção de distribuir quantidades em partes iguais até que não seja mais possível distribuir, noção essa que adquiriram por situações já vivenciadas.

Divisão e a teoria dos campos conceituais).

De acordo com Vergnaud (apud NICOLODI, 2009), campo conceitual é:

um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição. O domínio de um campo conceitual não ocorre em tempo determinado, pode levar alguns meses ou até mesmo alguns anos (VERGNAUD, 1990, p. 136).

Assim, a teoria dos campos conceituais postula que os conceitos matemáticos tracem seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação, não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação. (MAGINA, 2011).

Com relação ao conceito de divisão, vários estudos descrevem que o início da compreensão do conceito de divisão ocorre muito antes do ensino formal. Dessa forma, existe a necessidade do professor conhecer como os alunos agem diante de situações que envolvem a divisão, antes de formalizar esse conceito. Vergnaud (1990), afirma que é através de situações e de problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança (NICOLODI, 2009).

Segundo Vergnaud (1985, apud NICOLODI, 2009), a divisão está relacionada a duas diferentes ideias: partição (repartir) e de quotas (medir), que se trata de proporcionalidade inversa. Por exemplo, 13 dividido por quatro pode envolver diferentes relações implícitas, como 13 maçãs para serem distribuídas entre quatro crianças (um problema de partição), ou 13 maçãs para serem colocadas em caixas nas quais cabem quatro maçãs por caixa (um

problema de quotição). (BORBA & SELVA, 2007). Na visão dessas autoras, o ensino voltado para um desenvolvimento amplo deste conceito deve considerar essas duas situações, partição e quotição, e trabalhá-las junto aos alunos.

Problemática de pesquisa

Refletindo como a divisão de frações se enquadraria em um contexto, no qual coloca-se a importância de atividades que propiciem ao aluno situações de quotição e de partição para o ensino-aprendizagem de divisão, realizei buscas nos livros didáticos do acervo do CAP-Uerj, Instituto onde leciono. Em Centurión et al. (2008) uma regra é apresentada, sem nenhuma outra explicação prévia, seguida de um exemplo numérico, onde é usado o fato de que a divisão é o inverso da multiplicação. “Na divisão de frações, usamos uma regra muito estranha: multiplicamos a primeira fração pela fração inversa da segunda” (Centurión et al., 2008, p. 70). Dentre os livros Dante (2006), Luz et al. (2004) e Ribeiro (2010), a abordagem inicia-se por meio de um problema, que por sua vez é associado a um desenho representando frações como uma relação parte-todo, privilegiando assim o significado de quotição, e que pode ser relacionado à ideia de “quantos cabem”. Por exemplo, “Nos casos de divisão de frações que iremos analisar, basicamente a ideia é a mesma: devemos verificar quantas vezes determinada fração cabe em outra” (LUZ et al. 2004, p. 33). “Quantos $\frac{1}{9}$ de uma pizza cabem em $\frac{1}{3}$ de pizza?” (DANTE, 2006, p. 100). A divisão de números fracionários também pode ser associada a situações de partição. Podemos relacionar a situação na qual $\frac{1}{2}$ pizza é dividida entre 4 pessoas, sendo o resultado desta divisão quanto da pizza cada pessoa ficou. Torna-se mais difícil, no entanto, encontrar situações de partilha quando o denominador também é um número fracionário. Como imaginar uma situação onde $\frac{1}{2}$ deve ser dividido por $\frac{1}{4}$, cujo resultado seja quanto cada parte recebeu? E o que significa nesse caso cada parte?

Trabalhos relacionados

Em Gregg e Gregg (2007), os autores apresentam resultados de um trabalho desenvolvido com duas turmas do 6º e 8º anos em que problemas de divisão de frações com a ideia de quotição e de partição são explorados, nesta ordem. Inicialmente são propostos problemas de quotição, onde algumas questões são lançadas, juntamente com ilustrações, e a atividade é realizada sem nenhuma discussão prévia sobre o fato de que os problemas poderiam ser vistos como de divisão. Num passo seguinte, depois de discorrerem sobre

ideias de divisão, os pesquisadores perguntam aos alunos se seria possível divisão de frações com a ideia de partilha. A resposta foi negativa inicialmente. Os pesquisadores então apresentam uma nova série de perguntas envolvendo bolos e recipientes. Por exemplo,

Eu tenho $\frac{1}{3}$ de um bolo inteiro. Eu quero dividi-lo igualmente em 3 recipientes. Quanto do bolo haverá em cada recipiente?

Eu tenho $\frac{3}{4}$ de um bolo inteiro. Eu quero dividi-lo igualmente em 2 recipientes. Quanto do bolo haverá em cada recipiente?

Em seguida, apresentam problemas cujos divisores são frações.

Eu tenho $\frac{1}{3}$ de um bolo inteiro. Ele preenche exatamente $\frac{1}{2}$ recipiente. Quanto do bolo caberá em um recipiente inteiro?

Ao propor questões como a última citada, acreditamos que os autores modificam um pouco a demanda da tarefa. Uma sugestão seria iniciar com o problema “Eu tenho $\frac{1}{3}$ de um bolo inteiro. Ele preenche exatamente 3 recipientes. Quanto do bolo caberá em um recipiente apenas?”, dessa maneira as questões envolveriam a mesma ideia de divisão.

Os pesquisadores explicam que as perguntas foram elaboradas em um esforço para promover estratégias de solução que pudessem ser relacionadas com o algoritmo de divisão “multiplica o primeiro pelo inverso do segundo”.

Prosseguindo com a pesquisa sobre divisão de frações com o significado de partição, encontramos em Baldino e Souza (s.d.) uma discussão sobre um material que foi desenvolvido no Centro de Ciências, FAPERJ, Rio de Janeiro em 1983, chamado “Sispixa” (Figura 1). Tal material consiste em peças que representam salsichas e suas frações, e de cartões que unidos formam a figura de um cachorro, cujo corpo pode ser “esticado” pela inserção de novos cartões. Por exemplo, para representar $\frac{1}{3}$ de cachorro são necessários 3 cartões, indicando a cabeça, a barriga e a cauda do cachorro, respectivamente (Figura 1a). Para representar $\frac{1}{5}$ de cachorro, são inseridos mais dois cartões, totalizando 5 peças (Figura 1c), onde cada uma denota $\frac{1}{5}$ do cachorro. Dessa maneira, colocam-se as seguintes questões: Se você desse uma salsicha para cada meio cachorro, quantas salsichas um cachorro comeria? E se você desse uma salsicha para cada $\frac{5}{8}$ de um cachorro, quantas salsichas cinco cachorros comeria? E quantas salsichas são por cachorro?



Figura 1a



Figura 1b



Figura 1c

Figura 1 – Representação do Sispixa²

Percebemos assim, com o Sispixa, a possibilidade de trabalhar a divisão de frações com a ideia de partilha, por meio de um material multissensorial. Considerando, no entanto, a relevância da representação da unidade em uma atividade que envolve frações, apresentamos uma nova proposta para o material, na qual o tamanho do cachorro não é alterado. O material proposto consiste em cartões que representam salsichas e suas frações, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ de salsicha, bem como cachorros, inteiros, e de réguas que indicam as divisões necessárias para obtermos representações de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ da barriga de cada cachorro (Figura 2).

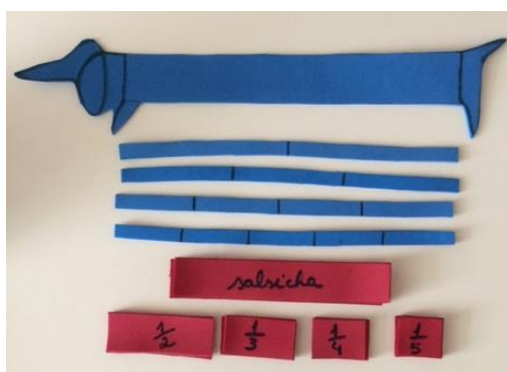


Figura 2 – Material proposto confeccionado em E.V.A. (espuma vinílica acetinada)

Aspectos Teóricos

As perspectivas dos pesquisadores que discutem a natureza “corporificada” de cognição (BARSALOU, 2008; GALLESE e LAKOFF, 2005; OAKLEY, 2007; DAMÁSIO, 2005) começam a permear o campo da Educação Matemática, oferecendo novas maneiras de interpretar os processos associados à apropriação de práticas matemáticas. Arzarello (2008) ao discorrer sobre novas formas de representação de transmissão de conhecimento, menciona que a primeira forma de aprendizagem, presente desde o início do desenvolvimento cognitivo da criança, trabalha com símbolos (linguístico, matemático, lógico) e reconstrói 'objetos', seus significados e representações mentais. Afirma que é uma forma sofisticada de conhecer e requer consciência dos procedimentos e a apropriação dos símbolos utilizados e seus significados. Neste sentido, nota-se que o ensino "tradicional" em matemática, o que é geralmente caracterizado como "transmissivo", baseia-se, quase

² A figura apresentada é uma reconstrução baseada na descrição de duas professoras que trabalharam com o Sispixa na década de 80.

exclusivamente, neste meio de aprendizagem. No entanto, os alunos que não são capazes de aprender, desta forma, necessariamente, não estão envolvidos no processo simbólico e vão tentar se lembrar dela por memorização. O risco de usar símbolos de forma mecânica é grande, e pode causar mal-entendidos e erros. (ARZARELLO, ROBUTTI & BAZZINI, 2005, apud ARZARELLO, 2008).

Arzarello (2008) prossegue afirmando que, por outro lado, a forma de aprendizagem perceptuo-motora envolve ação e percepção e produz aprendizagem baseada em fazer, tocar, mover e ver. Ela não só caracteriza a primeira fase de desenvolvimento cognitivo, mas também está envolvida em processos de aprendizagem mais avançadas. Esta forma de aprendizagem desafia a forma tradicional de ensino baseado principalmente na transmissão de conteúdos através da linguagem formal. Na verdade, a matemática é muitas vezes concebida como uma linguagem puramente formal, que trata de conceitos abstratos.

Com apoio na Teoria da Cognição Corporificada, que postula a indissociabilidade do corpo e da mente, buscamos caminhos para oferecer uma matemática escolar que respeita as particularidades de cada aprendiz, proporcionando dessa maneira experiências variadas, através dos diferentes sentidos, considerando assim que todos são capazes de aprender, mas não necessariamente da mesma forma. Para Healy e Fernandes (2011), a apropriação de práticas matemáticas envolve a coordenação de fala, gestos, objetos materiais e atividades sensoriais. Com um quadro teórico em desenvolvimento, compartilho com as autoras que a importância e o papel do corpo para a cognição são inquestionáveis. Diante dessa perspectiva, buscamos atividades multimodais que visam explorar o conteúdo divisão de frações.

Aspectos Metodológicos

Adotaremos o Design Experiments como metodologia de pesquisa. Esta metodologia envolve tentativas para estimular certas formas de aprendizagem e ao mesmo tempo fazer um estudo desse processo, permitindo ao pesquisador desenvolver uma melhor compreensão das formas pelas quais as noções matemáticas em questão são apropriadas (ou não) pelos aprendizes participantes. (COBB et al, 2003).

Segundo Cobb et al. (2003), as características transversais dessa metodologia são as explicações teóricas sobre os processos de aprendizagens, sejam dos estudantes, professores e organizações de ensino.

Podemos encontrar algumas características que convergem (COBB et al., 2003):

- Preocupação com o desenvolvimento de uma classe de teorias tanto sobre o processo de aprendizagem como sobre os meios para dar suporte a tal aprendizagem.
- Um caráter altamente intervencionista dessa metodologia possibilita desenvolver novas formas de aprendizagem. A observação detalhada de cada etapa da intervenção facilita identificar formas diferentes ou inéditas de aprendizagem.
- Uma característica cíclica que possibilita revisão investigativa durante cada experimento, proporcionando a revisão das conjecturas e criação de novos modelos na busca de um objetivo específico.
- Um pragmatismo inerente. As teorias desenvolvidas estão relacionadas com um domínio específico do processo de aprendizagem e são construções pessoais dos participantes da pesquisa.

A pesquisa será desenvolvida em ciclos nos quais serão feitos levantamentos, por meio de entrevistas, sobre as concepções que os participantes têm sobre divisão e frações, e o que pensam sobre as experiências que já tiveram sobre esse assunto no passado. Serão realizadas, num segundo momento, intervenções com sequências de atividades multissensoriais sobre frações, que abordem divisão. Em seguida, novos levantamentos serão feitos objetivando uma análise das possíveis mudanças das concepções dos participantes a respeito do tema.

A pesquisa será feita com diferentes sujeitos, de diferentes anos de escolaridade, e as intervenções serão realizadas individualmente, com pequenos grupos de alunos ou em turmas do CAP-Uerj, que já tenham trabalhado ou não o assunto divisão de frações.

Temos assim, como objetivo geral, identificar e analisar aspectos visuais e/ou multissensoriais que viabilizem a ideia de partilha (partilha) à divisão de frações, e especificamente, pretendemos elaborar um programa de ensino para o 6^o ano do Ensino Fundamental que introduza operações com números fracionários por meio da divisão/multiplicação.

Registro e Análise dos Dados

As entrevistas e intervenções serão videogravadas, visando o registro de falas e gestos que trazem indícios das concepções dos alunos sobre fração e divisão. Analisaremos os procedimentos adotados e as características de pensamentos manifestados pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades propostas. Também serão analisados os registros das atividades desenvolvidas em papel por parte dos alunos. Dessa maneira, os dados serão

analisados com enfoque nas atividades, para permitir modificações, e enfoque no aprendiz, para identificar como suas concepções evoluem durante a intervenção

Considerações finais

Concordamos com Vergnaud (1990), tendo por base a teoria dos campos conceituais, que tanto problemas de quotição quanto de partição devem ser desenvolvidos quando trata-se do ensino-aprendizagem de divisão. O presente texto aborda uma possibilidade de trabalhar divisão de frações com a ideia de partilha, que geralmente não é desenvolvida nos livros didáticos. Considerando a perspectiva da cognição corporificada, buscamos proporcionar experiências variadas com divisões e frações, por meio de atividades multissensoriais, observando e analisando as falas e os gestos dos participantes.

Pretendemos assim apresentar uma proposta de ensino sobre operações com frações para o 6º ano do Ensino Fundamental, buscar intervenções para um grupo de alunos que não aprenderam pelos métodos geralmente utilizados e contribuir para o debate sobre as relações entre corpo e cognição.

Referências

AMORIM, M. P.; DAMAZIO, A. **Apropriação das significações do conceito de divisão de números racionais**. 30ª Reunião GT: Educação Matemática/ n.19 - Caxambu-MG. 2007.

ARZARELLO, F. **Neuroscience: Embodiment and Multimodality**. Materiali Corso Dottoradoto “Storia e Didattica dele Matematiche dela Fisica e dela Chimica” – Palermo. 2008.

ARZARELLO, F.; ROBUTTI, O.; BAZZINI, L. **Acting is learning: focus on the construction of mathematical concepts**, Cambridge Journal of Education, vol. 35(1). 2005.

BARSALOU, L. W. **Grounded Cognition**. Annual Review of Psychology, v. 59, p. 617-645, 2008.

BALDINO, R. R.; SOUZA, A. C. **Action Research: Commitment to change, personal identity and memory**. Action Research Group in Mathematics Education, UNESP. Rio Claro, SP, Brasil. (s.d.)

BORBA, R.; SELVA, A. C. **Sondando e intervindo nas dificuldades de crianças em lidarem com restos de divisões.** In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. **O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino.** Edu. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 1. pp. 125-136, 2006.

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Novo matemática na medida certa,** 6a série. 10ª edição. São Paulo: Scipione. 2008.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER, R., & SCHAUNABEL, L. **Design Experiments in Educational Research.** Educational Researcher, v.32.1, 9-13. 2003.

DAMÁSIO, A. **O mistério da consciência: do corpo e das emoções ao conhecimento de si.** Tradução de: MOTTA, L. T. 7ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2005.

DANTE, L. **Tudo é matemática,** 6ª série. São Paulo: Ática. 2006.

GALLESE, V.; LAKOFF, G. **The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge.** Cognitive Neuropsychology, n. 22, p. 455-479, 2005.

GREGG, J.; GREGG, D. U. **Measurement and Fair-Sharing Models for Dividing Fractions.** Journal of Research in Mathematics Education, v. 12, pp. 490-496. 2007.
Disponível em: http://elem-math.wiki.educ.msu.edu/file/view/Gregg%26Gregg_DivFract_MTMS07.pdf. Acesso em: 29 ago. 2014.

HEALY, L.; FERNANDES, S. H. A. A. **Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego.** Educar em Revista, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 227-243, Editora UFPR. 2011.

KIERAN, T. **Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development.** In: HIEBERT, J. e BEHR, M. (eds.). Number concepts and operations in middle grades. Hillsdale, New Jersey, Erlbaum. 1988.

LOPES, A. J. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações.** Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, n° 31, p.1 -22. 2008.

LUZ, V. D.; DIAS, C.; NEVES, P. **Lições de Matemática**, 6ª série. São Paulo: Scipione. 2004.

MAGINA, S. **A pesquisa na sala de aula de matemática das séries iniciais do ensino fundamental. Contribuições teóricas da psicologia.** Educar em Revista, Curitiba, n. Especial 1/2011, p 63-75, Editora UFPR. 2011.

NICOLODI, J. E. **O conhecimento dos alunos de primeira série do ensino fundamental sobre a divisão. Dissertação de Mestrado em Educação.** UNIVALI. Itajaí (SC). 2009.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

OAKLEY, T. Image Schemas. In: GEERAERTS, D.; CUYCKENS, H. (Eds.) Handbook of Cognitive Linguistics. New York: Oxford University Press., p. 214-235. 2007.

OKUMA, E. K. **Ensino e aprendizagem de fração: um estudo comparativo e uma intervenção didática.** Trabalho de conclusão do Curso de graduação em Pedagogia. UNISALESIANO. Lins. 2010

RIBEIRO, J. D. **Projeto radix: matemática, 7º ano.** São Paulo: Scipione. 2010.

SELVA, A. C. V. **Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão.** In A. D. Schliemann & D. W. Carraher (Orgs.), A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa. pp. 95-119. Campinas: Papirus. 1998.

VERGNAUD, G. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória da representação.** Revista de Psychologie Française, n. 30-3/4, p. 245-252, 1985.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.** México: Trillas, 1991.

VIANNA, C. R. **A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática.** Boletim de Educação Matemática, vol. 21, n. 31, pp. 161-181, 2008.